INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE NANCY

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE APPLIQUEE & DE PROSPECTION MINIERE

Concours de 1974

Composition de MATHEMATIQUES.

Les diverses parties sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres. Les candidats sont priés d'indiquer très clairement les numéros des questions traitées. La notation (x, y) désigne le point de coordonnées x et y dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

- I -

On dit qu'une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est maximum (respectivement minimum) au point (x_o, y_o) si l'on peut trouver un cercle de centre (x_o, y_o) tel que, pour tout point intérieur à ce cercle, on ait

$$f(x, y) \leqslant f(x_o, y_o) \qquad \left(\text{respectivement} \quad f(x, y) \geqslant f(x_o, y_o)\right)$$

On admet que, si les dérivées partielles premières existent, et sont continues, des conditions nécessaires pour que f soit extremum (c'est-à-dire maximum ou minimum) en (x_o, y_o) sont $f'_x(x_o, y_o) = 0$ et $f'_y(x_o, y_o) = 0$.

On considère, p et q étant deux entiers strictement positifs, l'application f qui, dans le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r vérifiant $0 < r < 1$, est définie par

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \text{Log}\,(1 + x^p y^q) \qquad \text{(logarithme népérien)}$$

f est-elle extremum en $(0,0)$?

- II -

On considère une droite variable d'équation $x \cos\theta + y \sin\theta - h = 0$, dépendant des paramètres θ et h. On sait qu'elle est perpendiculaire au vecteur $\vec{u}\ (\cos\theta, \sin\theta)$ et que la distance d'un point $M(X, Y)$ à cette droite est $|X \cos\theta + Y \sin\theta - h|$.

On considère d'autre part un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. On note $\overline{X}$, $\overline{Y}$, leurs espérances, σ_x et σ_y leurs écarts types supposés non nuls, $\text{cov}(X, Y)$ et ρ leur covariance et leur coefficient de corrélation.

A tout élément ω de Ω, on associe le point $M(\omega)$ de coordonnées $X(\omega)$ et $Y(\omega)$. On appelle $D(\omega)$ la distance de $M(\omega)$ à Δ. C'est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ dépendant de Δ.

1°) Calculer $E(D^2)$, moment d'ordre 2 de $D(\omega)$ en fonction de $\overline{X}$, $\overline{Y}$, σ_x, σ_y, cov (X, Y), θ et h.

2°) Ecrire des conditions nécessaires sur θ et h pour que $E(D^2)$ soit extremum et montrer que toute droite Δ vérifiant ces conditions contient le point $(\overline{X}, \overline{Y})$.

On se bornera dans la suite de cette partie II aux droites Δ contenant $(\overline{X}, \overline{Y})$. Quelle est alors l'expression de $E(D^2)$?

3°) α) Que peut-on dire de $E(D^2)$ lorsque $\sigma_x = \sigma_y$ et cov $(X, Y) = 0$?

β) En supposant $\sigma_x \neq \sigma_y$ et cov $(X, Y) \neq 0$ et en désignant par θ_o un des arcs vérifiant les conditions écrites au (II, 2°), montrer que $E(D^2)$ peut se mettre sous la forme $E(D^2) = A - B \cos 2(\theta - \theta_o)$ où A et B sont des constantes qui s'expriment en fonction seulement de σ_x, σ_y et θ_o.

γ) Que peut-on dire si un et un seul des nombres $\sigma_x - \sigma_y$ ou cov (X, Y) est nul.

4°) Conclure que, sauf dans le cas [3°), α], il existe une droite unique Δ_o (resp. Δ'_o) pour laquelle $E(D^2)$ est minimum (resp. maximum), les droites Δ_o et Δ'_o étant perpendiculaires.

5°) Calculer en fonction de σ_x, σ_y, les coefficients de l'équation du second degré qui a pour solutions les valeurs des extremums de $E(D^2)$.

- III -

Les données sont les mêmes que dans II, mais Δ n'est parallèle à aucun des axes.

1°) En menant par $M(x, y)$ des parallèles aux axes, interpréter géométriquement les expressions

$$\frac{1}{\sin \theta} \quad (x \cos \theta + y \sin \theta - h)$$

et

$$\frac{1}{\cos \theta} \quad (x \cos \theta + y \sin \theta - h)$$

2°) On pose $D_1(\omega) = \left| \frac{1}{\sin \theta} (X(\omega) \cos \theta + Y(\omega) \sin \theta - h) \right|$

$$D_2(\omega) = \left| \frac{1}{\cos \theta} (X(\omega) \cos \theta + Y(\omega) \sin \theta - h) \right|$$

Calculer $E(D_1^2)$ et $E(D_2^2)$, moments d'ordre 2 de $D_1(\omega)$ et $D_2(\omega)$ en fonction de $\overline{X}$, $\overline{Y}$, σ_x, σ_y, ρ, θ et h.

3°) Ecrire des conditions nécessaires sur θ et h pour que $E(D_1^2)$ soit minimum. Montrer que toute droite Δ vérifiant ces conditions contient le point $(\overline{X}, \overline{Y})$.

4°) Pour une telle droite Δ contenant ce point $(\overline{X}, \overline{Y})$, exprimer $E(D_1^2)$ en fonction seulement de σ_x, σ_y, ρ, θ. Montrer qu'il existe une droite Δ_1 pour laquelle $E(D_1^2)$ est minimum. Calculer sa valeur et la comparer aux extremums de $E(D^2)$.

5°) Traiter pour $E(D_2^2)$ les mêmes questions qu'en [III, 3° et 4°] la droite correspondante étant notée Δ_2.

6°) On effectue un changement du repère orthonormé en conservant l'origine, les nouveaux axes étant parallèles aux droites trouvées au [II, 4°)]. Le point [$X(\omega)$, $Y(\omega)$] a pour coordonnées dans ce nouveau repère $X'(\omega)$, $Y'(\omega)$ qui sont deux nouvelles variables aléatoires dont on demande la covariance.

- IV -

Deux sacs S_1 et S_2 contiennent chacun n jetons numérotés de 1 à n. [n donné supérieur à 1]. On tire un jeton de chaque sac. Les tirages sont indépendants. Tous les jetons d'un même sac ont la même probabilité de sortie. A et B sont les variables aléatoires égales respectivement aux numéros a et b des jetons tirés de S_1 et S_2. On pose $X = A - B$, $Y = A + B$.

1) Calculer l'espérance et la variance de A, celles de X, celles de Y.
2) Déterminer les lois de X et de Y.
3) Déterminer a et b tels que soit réalisé l'évènement $(X = k) \cap (Y = \ell)$, avec k et ℓ entiers. Discuter suivant la position du point (k, ℓ) dans un plan affine euclidien. Etudier les cas particuliers suivants :

$$\begin{cases} k = 0 \\ \ell = 2n \end{cases} \qquad \begin{cases} k = n - 1 \\ \ell = n - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k = n - 1 \\ \ell = n + 3 \end{cases}$$

X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Calculer cov (X, Y)
5) Appliquer au couple (X, Y) les résultats des parties II et III.

- V -

Sur l'ensemble Ω des familles d'un pays, on définit la variable aléatoire Y qui associe à une famille le nombre d'enfants qu'elle contient et la variable X égale au nombre des garçons. On admet que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ et que, à chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est p (les sexes des enfants à chaque naissance sont des évènements indépendants).

1) Donner la loi du couple (X , Y)

2) Donner la loi de X

3) Calculer les espérances et les variances de X et de Y.

4) Calculer leur covariance et leur coefficient de corrélation en fonction de λ et p.

5) Déterminer Δ_o , Δ'_o , Δ_1 et Δ_2 en fonction de λ et p puis pour $\lambda = 2$, $p = \frac{1}{2}$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail